Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Târgu Mureş, aprilie 2024

CLASA a IX-a – soluţii şi bareme

Problema 1. Pe latura (BC) a triunghiului ABC se consideră punctele D și E, cu D între B și E.

Despre un punct R al segmentului (AE) vom spune că este *remarcabil* dacă dreptele PQ și BC sunt paralele, unde $\{P\} = DR \cap AC$, iar $\{Q\} = CR \cap AB$. Despre un punct R' al segmentului (AD) vom spune că este *remarcabil* dacă dreptele $P'Q'$ și BC sunt paralele, unde $\{P'\} = BR' \cap AC$, iar $\{Q'\} = ER' \cap AB$.

a) Dacă pe segmentul (AE) există un punct remarcabil, arătați că orice punct al segmentului (AE) este remarcabil.

b) Dacă fiecare dintre segmentele (AD) și (AE) conține câte un punct remarcabil, demonstrați că $BD = CE = \varphi \cdot DE$, unde $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ este numărul de aur.

Soluţie. a) Aplicând teorema lui Menelau în triunghiul ABE cu transversala $Q-R-C$, obținem că $\dfrac{AQ}{QB}\cdot\dfrac{BC}{CE}\cdot\dfrac{ER}{RA} = 1$, prin urmare $\dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{CE}{BC}\cdot\dfrac{RA}{ER}$. Analog, aplicând teorema lui Menelau în triunghiul AEC cu transversala $P-R-D$, obținem că $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{DE}{CD}\cdot\dfrac{RA}{ER}$. Avem:

$$PQ \| BC \Leftrightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC} \Leftrightarrow \frac{CE}{BC} = \frac{DE}{CD}.$$

.... **2p**

Această relație nu depinde de poziția punctului R pe segmentul (AE), ci doar de pozițiile punctelor D și E pe segmentul (BC). Rezultă că, dacă pe segmentul (AE) există un punct remarcabil, atunci orice punct al segmentului (AE) este remarcabil. **2p**

b) Notăm cu x, y și z lungimile segmentelor BD, DE, respectiv EC. Conform celor de mai sus, pe segmentul (AE) există un punct remarcabil dacă și numai dacă

$$\frac{x+y+z}{z} = \frac{y+z}{y} \Leftrightarrow \frac{x+y}{z} = \frac{z}{y} \Leftrightarrow z^2 = y^2 + xy.$$

Analog se arată că pe segmentul (AD) există un punct remarcabil dacă și numai dacă $x^2 = y^2 + yz$. **1p**

Scăzând aceste egalități, rezultă că $z^2 - x^2 = y\,(x - z)$. Pentru a nu avea semne contrare în cei doi membri, se impune condiția $x = z$. Deducem că $x^2 - xy - y^2 = 0$, sau $t^2 - t - 1 = 0$, unde $t = \dfrac{x}{y} > 0$. Singura soluție pozitivă a acestei ecuații este $t = \varphi$, de unde cerința problemei. **2p**

Problema 2. Fie a și b două numere reale din intervalul $(0,\,1)$, astfel încât a este număr rațional și

$$\{na\} \geq \{nb\}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n.$$

Demonstrați că $a = b$.

(Am notat cu $\{x\}$ partea fracționară a numărului real x.)

Soluţie. Fie $a = \dfrac{p}{q}$, unde p și q sunt numere naturale nenule, prime între ele, cu $p < q$.

Atunci $0 = \{qa\} \geq \{qb\} \geq 0$, prin urmare qb este un număr natural. Rezultă că $b = \dfrac{s}{q}$, unde s este un număr natural nenul.

Considerând $n = 1$ în relația din ipoteză, obținem că $\{a\} \geq \{b\}$, de unde $p \geq s$. **2p**

Deoarece numerele p și q sunt prime între ele, există un număr natural nenul k astfel încât $kp \equiv 1 \pmod{q}$.

Pentru acest k avem $\{ka\} = \left\{k \cdot \dfrac{p}{q}\right\} = \dfrac{1}{q}$. Atunci $\dfrac{1}{q} = \{ka\} \geq \{kb\} = \left\{k \cdot \dfrac{s}{q}\right\}$, de unde rezultă că numărul $\left\{k \cdot \dfrac{s}{q}\right\}$ este egal fie cu 0, fie cu $\dfrac{1}{q}$.
.... **3p**

Dacă $\left\{k \cdot \dfrac{s}{q}\right\} = 0$, atunci $q \mid ks$; cum $(q,k) = 1$, înseamnă că $q \mid s$, fals.

Dacă $\left\{k \cdot \dfrac{s}{q}\right\} = \dfrac{1}{q}$, atunci $ks \equiv 1 \pmod{q}$, așadar $q \mid k\,(p - s)$; cum $(q,k) = 1$, înseamnă că $q \mid p - s$. Însă $0 \leq p - s < q$, așadar $p - s = 0$. Rezultă că $p = s$, prin urmare $a = b$. **2p**

Problema 3. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$(f(x) - y) \cdot f(x + f(y)) = f(x^2) - yf(y),$$

oricare ar fi numerele reale x şi y.

Soluţia 1. Considerăm afirmaţia

$$P(x,y) : (f(x) - y) \cdot f(x + f(y)) = f(x^2) - yf(y),$$

adevărată pentru orice valori ale numerelor x şi y.

În rezolvarea problemei ne vom baza pe următoarea

Lemă. Dacă există două valori reale distincte $y_1 \neq y_2$ astfel încât $f(y_1) = f(y_2) = k$, atunci f este funcţie constantă: $f(x) = k$, pentru orice număr reale x.

Într-adevăr, considerând $P(x, y_1)$ și $P(x, y_2)$, obţinem relaţiile $(f(x) - y_1) \cdot f(x+k) = f(x^2) - ky_1$, respectiv $(f(x) - y_2) \cdot f(x+k) = f(x^2) - ky_2$. Prin scădere, acestea conduc la $(y_1 - y_2)f(x+k) = k(y_1 - y_2)$, adică $f(x+k) = k$, pentru orice număr real x. Astfel, funcția f este constantă....... **2p** + Din $P(0,0)$ deducem că $f(0) \cdot f(f(0)) = f(0)$. Să presupunem că $f(0) = 0$.

În cazul în care există două valori reale distincte $y_1 \neq y_2$ astfel încât $f(y_1) = f(y_2) = k$, atunci f este funcţie constantă (conform Lemei): $f(x) = 0$, pentru orice număr real x. **1p**

În caz contrar, pentru orice $y_1 \neq y_2$ avem că $f(y_1) \neq f(y_2)$. Considerând $P(0, y)$, deducem că $-yf(f(y)) = -yf(y)$, deci $f(f(y)) = f(y)$ pentru orice y real. Din presupunerea făcută conchidem că $f(y) = y$, pentru orice număr real y, așadar f este funcţia identică a mulţimii $\mathbb{R}$. **2p**

Dacă $f(0) \neq 0$, rezultă că $f(f(0)) = 1$. Din $P(1, f(1))$ deducem $f(1) = f(1) \cdot f(f(1))$.

Dacă $f(1) = 0$, egalităţile $P(1, f(0))$, $P(2,1)$ și $P(2,4)$ conduc la $f(2) = 1$, $f(4) = 0$, respectiv $-3 = 0$, contradicţie. Deducem că $f(f(1)) = 1$.

Astfel, atât în cazul $f(0) \neq f(1)$, cât și în cazul $f(0) = f(1)$ putem aplica Lema; obținem că f este funcţie constantă: $f(x) = 1$, pentru orice număr real x.

Toate cele trei funcţii găsite verifică relaţia din ipoteză. **2p**

Soluţia 2. Considerăm afirmaţia

$$P(x,y) : (f(x) - y) \cdot f(x + f(y)) = f(x^2) - yf(y),$$

adevărată pentru orice valori ale numerelor reale x şi y.

Din $P(0,0)$ deducem că $f(0) \cdot f(f(0)) = f(0)$.

Dacă $f(0) = 0$, din $P(0, y)$ și $P(x, 0)$ obţinem $f(f(y)) = f(y)$ **(1)**, respectiv $f^2(x) = f(x^2)$ **(2)**, pentru orice numere reale x şi y. Apoi, $P(-f(y), y)$

conduce la $yf(y) = f(f^2(y)) \overset{(2)}{=} [f(f(y))]^2 \overset{(1)}{=} f^2(y)$, deci $yf(y) = f^2(y)$. Deducem că $f(y) = y$, oricare ar fi numărul real y cu $f(y) \neq 0$. **3p**

Dacă ar exista $a \neq 0$ cu $f(a) = 0$ şi $b \neq 0$ cu $f(b) \neq 0$, din $P(b, a)$ obţinem $(f(b) - a) \cdot f(b) = f(b^2) \overset{(2)}{=} f^2(b)$, deci $(b - a)b = b^2$, adică $-a \cdot b = 0$, contradicție. Deducem că $f(x) = 0$, pentru orice număr real x sau $f(x) = x$, pentru orice număr real x. **1p**

Dacă $f(0) \neq 0$, rezultă $f(f(0)) = 1$. Din $P(1, f(1))$ deducem $f(1) = f(1) \cdot f(f(1))$.

În cazul în care $f(1) = 0$, egalităţile $P(1, f(0))$, $P(2, 1)$ și $P(2, 4)$ conduc la $f(2) = 1$, $f(4) = 0$, respectiv $-3 = 0$, contradicţie. Aşadar $f(f(1)) = 1$.
.... **1p**

Din $P(0, 1)$ și $P(-1, 1)$ obţinem $f(1) = 1$, respectiv $f(-1) = 1$. Pentru x real, din $P(x, 1)$ deducem $(f(x) - 1) \cdot f(x + 1) = f(x^2) - 1$, iar din $P(x, -1)$ obţinem $(f(x) + 1) \cdot f(x + 1) = f(x^2) + 1$. Prin scăderea acestor două relaţii, rezultă că $f(x + 1) = 1$, pentru orice număr real x. În concluzie, $f(x) = 1$ pentru orice număr real x.

Toate cele trei funcţii găsite verifică relaţia din ipoteză. **2p**

Problema 4. Fie a un număr natural nenul dat. Considerăm șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = \dfrac{1}{1 + na}$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

Demonstrați că, oricare ar fi numărul natural $k \geq 3$, există numere naturale nenule $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ astfel încât numerele $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Soluţie. Vom demonstra cerința prin inducție după k.

Observăm că

$$\frac{1}{1 + ma} + \frac{1}{(1 + ma)(1 + 2ma)} = \frac{2}{1 + 2ma},$$

prin urmare există o progresie aritmetică formată din trei termeni ai șirului: x_m, x_{2m}, x_{2m^2a+3m}. **2p**

Presupunem că există k numere naturale nenule $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ astfel încât numerele $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Considerând $y = 2x_{n_1} - x_{n_2}$, numerele y, x_{n_1}, $x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ sunt în progresie aritmetică (în număr de $k + 1$).

Avem:

$$y = \frac{2}{1 + n_1 a} - \frac{1}{1 + n_2 a} = \frac{1 + pa}{(1 + n_1 a)(1 + n_2 a)} = \frac{1 + pa}{1 + (n_1 + n_2 + n_1 n_2 a)\, a},$$

unde $p = 2n_2 - n_1$. **2p**

Rezultă că

$$\frac{y}{1+pa},\ \frac{x_{n_1}}{1+pa},\ \frac{x_{n_2}}{1+pa},\ \ldots,\ \frac{x_{n_k}}{1+pa}$$

sunt $k+1$ termeni $x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_{k+1}}$ ai șirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

Aceștia sunt în progresie aritmetică, deoarece atunci când împărțim termenii unei progresii aritmetice printr-un număr real nenul, obținem tot o progresie aritmetică.

În plus, avem $m_1 < m_2 < \cdots < m_{k+1}$, pentru că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton. Cu aceasta, demonstrația este completă. **3p**