MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Târgu Mureş, 3 aprilie 2024

CLASA a XI-a – soluţii şi bareme

Problema 1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe I, cu proprietatea $f(x) \cdot f''(x) = 0$, pentru orice $x \in I$. Arătaţi că $f''(x) = 0$, pentru orice $x \in I$.

Soluţie. Fie $A = \{x \in I|\ f''(x) \neq 0\}$. Presupunem, prin absurd, $A \neq \emptyset$. Cum $f'' = (f')'$ are proprietatea lui Darboux pe I, mulţimea A nu poate avea un singur element. **2p**
Fie $a, b \in A$, cu $a < b$. Din ipoteză, deducem $f(a) = f(b) = 0$. Funcţia $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)f'(x)$, $\forall\, x \in I$, este monoton crescătoare pe I deoarece $g'(x) = (f'(x))^2 + f(x)f''(x) = (f'(x))^2 \geq 0$, $\forall\, x \in I$. Atunci, din $g(a) = g(b) = 0$, obţinem $g(x) = 0$, $\forall\, x \in [a, b]$, deci $g'(x) = 0$, $\forall\, x \in [a, b]$. Rezultă $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in [a, b]$. Dar atunci $f''(a) = \lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = 0$, în contradicţie cu $a \in A$. Prin urmare $A = \emptyset$, adică $f''(x) = 0$, pentru orice $x \in I$. **5p**

Problema 2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă.

a) Arătaţi că matricea AA^T are valorile proprii reale, strict pozitive.

b) Presupunem că există numerele naturale nenule şi distincte p şi q astfel ca $(AA^T)^p = (A^TA)^q$. Arătaţi că $A^T = A^{-1}$.

(Notaţie: A^T este transpusa matricei A.)

Soluţie.

a) *Demonstraţia 1.*
Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a matricei AA^T şi $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{O_{n,1}\}$, astfel încât $AA^TX = \lambda X$. Transpunând şi conjugând relaţia anterioară, obţinem $\overline{X}^T AA^T = \overline{\lambda}\,\overline{X}^T$, de unde, prin înmulţire la dreapta cu X, rezultă $\overline{X}^T AA^T X = \overline{\lambda}\,\overline{X}^T X$. Astfel, $\overline{(A^TX)}^T (A^TX) = \overline{\lambda}\,(\overline{X}^T X)$. Dacă

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ şi } A^TX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

atunci egalitatea matriceală anterioară devine $\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$. Cum $X \neq O_{n,1}$ şi A este inversabilă, deci $A^T X \neq O_{n,1}$, avem $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$ şi $\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 > 0$. Rezultă $\lambda \in (0, \infty)$.

Demonstraţia 2.

Deoarece $(AA^T)^T = AA^T$, matricea reală simetrică AA^T are valorile proprii reale. Cum A^T este inversabilă, avem $A^T X \neq O_{n,1}$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n,1}\}$. Atunci $X^T(AA^T)X = (A^T X)^T (A^T X) > 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n,1}\}$, adică matricea AA^T este pozitiv definită. Rezultă că valorile proprii ale matricei AA^T sunt strict pozitive.

.... **2p**

b) Matricele AA^T şi $A^T A$ au acelaşi polinom caracteristic **1p**

Fie $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ valorile proprii comune ale matricelor AA^T şi $A^T A$. Matricele $(AA^T)^p$ şi $(A^T A)^q$ au valorile proprii $\lambda_1^p \leq \lambda_2^p \leq \ldots \leq \lambda_n^p$ şi respectiv $\lambda_1^q \leq \lambda_2^q \leq \ldots \leq \lambda_n^q$. Din $(AA^T)^p = (A^T A)^q$ rezultă $\lambda_i^p = \lambda_i^q$, de unde $\lambda_i^{p-q} = 1$, pentru $i = 1, \ldots, n$. Atunci $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1$ **2p**

Notăm $AA^T - I_n = B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Matricea B este are valorile proprii nule, deci B^2 are valorile proprii nule. Cum B este simetrică, obţinem $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2 = \operatorname{Tr}\left(BB^T\right) = \operatorname{Tr}\left(B^2\right) = 0$. Rezultă $B = O_n$, adică $AA^T = I_n$.

Rezultă $A^T = A^{-1}$ **2p**

Problema 3. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considerăm funcţia matriceală $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, definită prin $f(Z) = AZ + B\overline{Z}$, $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unde $\overline{Z}$ este matricea având ca elemente conjugatele elementelor lui Z. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(1) funcţia f este injectivă;

(2) funcţia f este surjectivă;

(3) matricele $A + B$ şi $A - B$ sunt inversabile.

Soluţie. Pentru $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, există $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $Z = X + iY$, iar $\overline{Z} = X - iY$. Rezultă $f(Z) = (A + B)X + i(A - B)Y$ **1p**

(1)$\Rightarrow$(3). Presupunem, prin absurd, că $A + B$ este neinversabilă sau $A - B$ este neinversabilă. Dacă matricea $A + B$ este neinversabilă, atunci $\det(A+B) = 0$, deci există $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n,1}\}$ astfel ca $(A+B)C = O_{n,1}$. Definim matricea $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \neq O_n$, având cele n coloane egale cu C.

Obţinem $f(X) = (A+B)X = O_n = f(O_n)$, în contradicţie cu ipoteza (1). Dacă matricea $A-B$ este neinversabilă, atunci $\det(A-B) = 0$, deci există $D \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n,1}\}$ astfel ca $(A-B)D = O_{n,1}$. Definim matricea $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Y \neq O_n$, având cele n coloane egale cu D. Astfel, avem $f(iY) = i(A-B)Y = O_n = f(O_n)$, în contradicţie cu ipoteza (1).

Prin urmare, implicaţia (1)⇒(3) este demonstrată **2p**

(3)⇒(1). Fie $Z_1 = X_1 + iY_1$, cu $X_1, Y_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, şi $Z_2 = X_2 + iY_2$, cu $X_2, Y_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel încât $f(Z_1) = f(Z_2)$. Atunci, are loc relaţia $(A+B)X_1 + i(A-B)Y_1 = (A+B)X_2 + i(A-B)Y_2$. Rezultă relaţiile $(A+B)(X_1 - X_2) = O_2$ şi $(A-B)(Y_1 - Y_2) = O_2$. Din ipoteza (3) deducem $X_1 - X_2 = O_2$ şi $Y_1 - Y_2 = O_2$. Astfel, $X_1 = X_2$ şi $Y_1 = Y_2$, deci $Z_1 = Z_2$.

Rezultă că funcţia f este injectivă **1p**

(2)⇒(3). Presupunem, prin absurd, că $A+B$ este neinversabilă sau $A-B$ este neinversabilă. Dacă matricea $A+B$ este neinversabilă, atunci $\det(A+B) = 0$. Pentru $Z = X + iY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avem $\det((A+B)X) = 0$. Rezultă $f(Z) \neq I_n$, $\forall\, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, în contradicţie cu ipoteza (2). Dacă matricea $A-B$ este neinversabilă, atunci $\det(A-B) = 0$. Pentru oricare $Z = X + iY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avem $\det((A-B)Y) = 0$, deci $f(Z) \neq iI_n$, în contradicţie cu ipoteza (2).

Astfel, implicaţia (2)⇒(3) este demonstrată **2p**

(3)⇒(2). Fie $Z = X + iY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Definim matricele $U = (A+B)^{-1}X$ şi $V = (A-B)^{-1}Y$. Atunci avem $f(U+iV) = X + iY = Z$.

Rezultă că funcţia f este surjectivă **1p**

Notă. Pentru justificarea echivalenţei (1) ⇔ (2) pe baza faptului că f este o aplicaţie liniară pe spaţiul vectorial finit dimensional $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se acordă **3p**, iar pentru demonstrarea uneia dintre echivalenţele (1) ⇔ (3) sau (2) ⇔ (3) se acordă **4p**.

Problema 4. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $g(x) = 2f(x) + f(x^2)$, pentru $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că, dacă f este mărginită într-o vecinătate a originii, iar g este continuă în origine, atunci f este continuă în origine.

b) Daţi un exemplu de funcţie f, discontinuă în origine, pentru care funcţia g este continuă în origine.

Soluţia 1.

a) Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar. Conform ipotezei, există $\delta_1, M > 0$ astfel încât $|f(x)| < M$, $\forall\, x \in (-\delta_1, \delta_1)$. Cum g este continuă în origine, există $\delta_2 > 0$, care depinde de ε, astfel încât $|g(x)-g(0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, x\in(-\delta_2,\delta_2)$. Definim $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,1\}$. Din $0<\delta\le 1$, deducem $a^2<\delta$, $\forall\, a\in(-\delta,\delta)$.

Fie $x\in(-\delta,\delta)$. Deoarece $|x|<\delta\le\delta_2$, avem

$$|f(x)-f(0)|=\frac{|2f(x)-2f(0)|}{2}\le\frac{|2f(x)+f(x^2)-3f(0)|+|f(x^2)-f(0)|}{2}$$
$$=\frac{|g(x)-g(0)|}{2}+\frac{|f(|x|^2)-f(0)|}{2}<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{|f(|x|^2)-f(0)|}{2}.$$

.... **2p**

Prin inducţie, obţinem inegalitatea

$$|f(x)-f(0)|<\varepsilon\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\frac{\left|f\left(|x|^{2^n}\right)-f(0)\right|}{2^n},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Fie $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $2^p>\dfrac{4M}{\varepsilon}$. Avem $|x|^{2^p}<\delta\le\delta_1$. Atunci

$$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon\left(1-\frac{1}{2^p}\right)}{2}+\frac{\left|f\left(|x|^{2^p}\right)\right|+|f(0)|}{2^p}\le\frac{\varepsilon\left(1-\frac{1}{2^p}\right)}{2}+\frac{2M}{2^p}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Rezultă că funcţia f este continuă în origine **2p**

b) Fie $a\in(0,1)$ şi $A=\left\{\pm a^{2^n},\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. Definim funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}(-1)^n2^n, & |x|=a^{2^n},\ n\in\mathbb{Z}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus A\end{cases}.$$

Deoarece $\lim\limits_{k\to\infty}a^{2^{2k}}=0$ şi $\lim\limits_{k\to\infty}f\left(a^{2^{2k}}\right)=\lim\limits_{k\to\infty}2^{2k}=\infty$, f este discontinuă în origine.

Dacă $x\in\mathbb{R}\setminus A$, atunci $x^2\in\mathbb{R}\setminus A$ (reducere la absurd). Rezultă $g(x)=0$.
Dacă $x\in A$, atunci există $n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $|x|=a^{2^n}$. Rezultă

$$g(x)=2f\left(a^{2^n}\right)+f\left(a^{2^{n+1}}\right)=2^{n+1}[(-1)^n+(-1)^{n+1}]=0.$$

Prin urmare, g este funcţia nulă, continuă în origine.................... **3p**

Soluţia 2

a) Fie limitele $L:=\limsup\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\searrow0}(\sup\{f(x)|\ x\in(-\varepsilon,\varepsilon)\setminus\{0\}\})$ şi $\ell:=\liminf\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\searrow0}(\inf\{f(x)|\ x\in(-\varepsilon,\varepsilon)\setminus\{0\}\})$. Deoarece f este mărginită pe o vecinătate a originii, avem $\ell,L\in\mathbb{R}$, cu $\ell\le L$ **1p**

Există şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$, cu termenii nenuli, convergente la 0, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$ şi respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \ell$ **1p**

Din continuitatea lui g în origine şi proprietăţile limitelor superioară şi inferioară, rezultă

$$g(0) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} (2f(x_n) + f(x_n^2)) = \liminf_{n\to\infty} (2f(x_n) + f(x_n^2))$$

$$\geq 2\liminf_{n\to\infty} f(x_n) + \liminf_{n\to\infty} f(x_n^2) = 2\lim_{n\to\infty} f(x_n) + \liminf_{n\to\infty} f(x_n^2) \geq 2L + \ell$$

şi

$$g(0) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} (2f(y_n) + f(y_n^2)) = \limsup_{n\to\infty} (2f(y_n) + f(y_n^2))$$

$$\leq 2\limsup_{n\to\infty} f(y_n) + \limsup_{n\to\infty} f(y_n^2) = 2\lim_{n\to\infty} f(y_n) + \limsup_{n\to\infty} f(y_n^2) \leq 2\ell + L.$$

Cum $\ell \leq L$, din inegalitatea $2L + \ell \leq g(0) \leq 2\ell + L$, rezultă $L = \ell = \dfrac{g(0)}{3}$.

Prim urmare, f este continuă în origine, cu $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{g(0)}{3} = f(0)$ **2p**

b) A se vedea *Soluţia 1*.