MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Târgu Mureș, 3 aprilie 2024

CLASA a X-a – soluții și bareme

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$3^{\log_5(5x-10)} - 2 = 5^{-1+\log_3 x}.$$

Soluție. Observăm că ecuația are soluțiile $x_1 = 3$ și $x_2 = 27$; arătăm că ea nu mai are și alte soluții **2p**

Continuarea A. Folosind proprietățile logaritmilor, ecuația devine $15 \cdot 3^{\log_5(x-2)} = 10 + 5^{\log_3 x}$, adică $15(x-2)^{\log_5 3} = 10 + x^{\log_3 5}$, cu $x > 2$ **3p**

Deoarece $\log_3 5 > 1$ și $0 < \log_5 3 < 1$, funcția $2 < x \mapsto 15(x-2)^{\log_5 3}$ este strict concavă, iar funcția $0 < x \mapsto 10 + x^{\log_3 5}$ este strict convexă, deci funcția $f : (2,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 15(x-2)^{\log_5 3} - 10 - x^{\log_3 5}$ este strict concavă, iar ecuația are cel mult două soluții **2p**

Continuarea B. Din condiția de existență a logaritmilor avem $x > 2$. Observăm că funcția $f : (2,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = 3^{\log_5(5x-10)}$ este inversabilă, având inversa $f^{-1}(x) = \frac{5^{\log_3 x}+10}{5}$, iar ecuația din enunț devine $f(x) = f^{-1}(x)$ **1p**

Deoarece f este strict crescătoare, ecuația din enunț este echivalentă cu $f(x) = x$, adică $3^{\log_5(5x-10)} = x$, sau $\log_5(5x-10) = \log_3 x$ **1p**

Dacă $\log_5(5x-10) = \log_3 x = t$, atunci $x = 3^t = \frac{1}{5}(5^t + 10)$, ceea ce este echivalent cu a rezolva ecuația $5 \cdot 3^t = 5^t + 10$, sau $5 = \left(\frac{5}{3}\right)^t + 10\left(\frac{1}{3}\right)^t$, cu $t > \log_3 2$ **1p**

Deoarece funcția $g : (\log_3 2, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(t) = \left(\frac{5}{3}\right)^t + 10\left(\frac{1}{3}\right)^t$ este strict convexă, fiind sumă de funcții strict convexe, ecuația $g(t) = 5$ admite cel mult două soluții **2p**

Problema 2. Considerăm pentagonul inscriptibil $ABCDE$ în care $AB = BC = CD$ și centrul de greutate al pentagonului coincide cu centrul cercului circumscris. Arătați că pentagonul $ABCDE$ este regulat.

Centrul de greutate al unui pentagon este punctul din planul pentagonului al cărui vector de poziție este egal cu media aritmetică a vectorilor de poziție ai vârfurilor.

Soluție. Considerăm un reper ortonormat cu centrul în centrul O al cercului $\mathcal{C}$ circumscris pentagonului $ABCDE$, cu unitatea de lungime egală cu raza cercului $\mathcal{C}$ și cu axa reală mediatoarea segmentului BC. Fie z_X afixul punctului X în acest reper.

Deoarece $AB = BC = CD$, avem $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 2\alpha \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$. Reiese că afixele vârfurilor pentagonului sunt $z_A = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$, $z_B = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $z_C = \cos\alpha - i\sin\alpha$, $z_D = \cos 3\alpha - i \sin 3\alpha$ și $z_E = \cos\beta + i\sin\beta$, cu $\beta \in (3\alpha, 2\pi - 3\alpha)$ **2p**

Dacă centrul de greutate al pentagonului coincide cu O, atunci $z_A + z_B + z_C + z_D + z_E = 0$, de unde obținem $\cos\beta + 2\cos 3\alpha + 2\cos\alpha = 0$ și $\sin\beta = 0$ **1p**

Rezultă $\beta = \pi$, $-\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos 3\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$ (prin înmulțire cu $\sin\alpha$) și, prin transformarea sumelor în produse, $\sin 4\alpha = \sin\alpha$ **2p**

Cum $0 < \alpha < 4\alpha < \frac{4\pi}{3}$, deducem $4\alpha = \pi - \alpha$, deci $\alpha = \frac{\pi}{5}$ de unde $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOA = \frac{2\pi}{5}$, adică $ABCDE$ este pentagon regulat **2p**

Altă soluție. Considerăm un reper ortonormat cu centrul în centrul O al cercului $\mathcal{C}$ circumscris pentagonului $ABCDE$, cu unitatea de lungime egală cu raza cercului $\mathcal{C}$ și cu axa reală OA. Fie z_X afixul punctului X în acest reper.

Deoarece $AB = BC = CD$, avem $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. Reiese că afixele vârfurilor pentagonului sunt $z_A = 1$, $z_B = z$, $z_C = z^2$, $z_D = z^3$ și $z_E = w$, cu $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ și $w = \cos\beta + i\sin\beta$, $\beta \in (3\alpha, 2\pi)$ **2p**

Dacă centrul de greutate al pentagonului coincide cu O, atunci $z_A + z_B + z_C + z_D + z_E = 0$, de unde obținem $1 + z + z^2 + z^3 + w = 0$ **1p**

Obținem $w = \frac{1-z^4}{z-1}$, de unde $\overline{w} = \frac{1-\overline{z}^4}{\overline{z}-1}$ și, folosind $w\overline{w} = z\overline{z} = 1$, deducem relația $\frac{1-z^4}{z-1} \cdot \frac{z^4-1}{z^3(1-z)} = 1$ **2p**

Efectuând calculele, obținem $(z^5 - 1)(z^3 - 1) = 0$. Singura soluție a acestei ecuații având argumentul în $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ este $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$, deci $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOA = \frac{2\pi}{5}$, adică $ABCDE$ este pentagon regulat **2p**

Problema 3. Fie numărul natural $n \geqslant 2$ și $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru care $f(k) \leqslant f(k+1) \leqslant f(k) + 1$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

a) Determinați cardinalul mulțimii $\mathcal{F}$.

b) Determinați numărul total al punctelor fixe ale funcțiilor din $\mathcal{F}$.

Un punct fix al funcției f este un număr $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $f(x) = x$.

Soluție. a) Numărăm funcțiile din $\mathcal{F}$ cu $f(1) = k$, $k = \overline{1,n}$. Asociem fiecărui $i = \overline{2,n}$ numărul $f(i) - f(i-1) \in \{0, 1\}$, cu restricția că pot fi cel mult $n - k$ de 1. Această asociere este bijectivă, iar posibilitățile de a alege numerele 0 și 1 ca mai sus sunt în număr de $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_{n-1}^{n-k}$ (sunt posibilitățile de a plasa 0, 1, 2, ..., $n - k$ de 1) **1p**

Rezultă $|\mathcal{F}| = \sum\limits_{k=1}^{n}(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_{n-1}^{n-k}) = \sum\limits_{p=0}^{n-1}(n-p)C_{n-1}^p = n \cdot 2^{n-1} - (n-1)\sum\limits_{p=0}^{n-1} C_{n-2}^{p-1} = (n+1)2^{n-2}$ **2p**

b) Numărăm de câte ori apare punctul fix k la funcțiile din $\mathcal{F}$, $k = \overline{1,n}$ (același punct fix poate apărea la mai multe funcții). Asociem fiecărei funcții pentru care $f(k) = k$ numerele $f(i) - f(i-1) \in \{0, 1\}$, $i = \overline{2,n}$ **2p**

Deoarece aceste numere pot fi alese fără restricții, există 2^{n-1} posibilități, deci fiecare punct fix apare la 2^{n-1} funcții, iar $\sum\limits_{f \in \mathcal{F}} |\mathrm{Fix}\,(f)| = n \cdot 2^{n-1}$ **2p**

Altă soluție. Notăm cu $\mathcal{F}_n$ mulțimea din enunț, cu $k_n = |\mathcal{F}_n|$ și cu $s_n = \sum\limits_{f \in \mathcal{F}_n} |\mathrm{Fix}(f)|$. Pentru $n = 2$ avem $k_2 = 3$ și $s_2 = 4$.

a) Observăm că dacă $f \in \mathcal{F}_{n+1}$ și $f(n) \leqslant n$, atunci restricția lui f la $\{1, 2, \ldots, n\}$ este o funcție din $\mathcal{F}_n$. Reciproc, orice funcție din $\mathcal{F}_n$ poate fi extinsă la una din $\mathcal{F}_{n+1}$ în două moduri, deoarece $f(n+1) \in \{f(n), f(n)+1\}$ **1p**

Pentru cazul $f(n) = n + 1$ avem $f(n+1) = n + 1$ și apoi, parcurgând valorile $f(n-1), f(n-2), \ldots, f(1)$, observăm că la fiecare pas $f(k+1) - f(k)$ poate fi 0 sau 1, deci putem construi f în 2^{n-1} moduri. Așadar, avem recurența $k_{n+1} = 2k_n + 2^{n-1}$, iar cum $k_2 = 3$, obținem $k_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}$ **2p**

b) Fie $a_i(n)$ numărul funcțiilor $f \in \mathcal{F}_n$ pentru care $i \in \operatorname{Fix}(f)$. Atunci avem $s_n = a_1(n) + a_2(n) + \ldots + a_n(n)$.

Fie $f \in \mathcal{F}_{n+1}$ o funcție pentru care $f(k) = k$, pentru $k \leqslant n$. Atunci, folosind relația din ipoteză, avem:

$$f(n) \leqslant f(n-1) + 1 \leqslant \ldots \leqslant f(k) + (n-k) = n.$$

Așadar, restricția lui f la $\{1, 2, \ldots, n\}$ este o funcție din $\mathcal{F}_n$, adică f se obține dintr-o funcție din $\mathcal{F}_n$, căreia îi este adăugată valoarea $f(n+1)$. Dar, cum $f(n) \leqslant n$, valoarea lui $f(n+1)$ poate fi aleasă în două moduri, ceea ce implică $a_k(n+1) = 2a_k(n)$, pentru orice $k \leqslant n$ ... **2p**

Pentru a determina $a_{n+1}(n+1)$, observăm că $f(n+1) = n+1$, iar parcurgând valorile $f(n), f(n-1), \ldots, f(1)$, observăm că la fiecare pas $f(k+1) - f(k)$ este 0 sau 1, adică f se poate construi în 2^n moduri. Așadar, $a_{n+1}(n+1) = 2^n$ **1p**

De aici avem recurența $s_{n+1} = 2s_n + 2^n$, iar cum $s_2 = 4$, obținem $s_n = n \cdot 2^{n-1}$ **1p**

Încă o soluție. Observăm că dacă $f(\ell) = \ell = f(\ell - 1)$, atunci nu există puncte fixe ale funcției $f \in \mathcal{F}$ mai mici decât ℓ. De asemenea, dacă $f(\ell) = \ell = f(\ell+1)$, atunci nu există puncte fixe ale lui $f \in \mathcal{F}$ mai mari decât ℓ. De aici deducem că punctele fixe ale unei funcții $f \in \mathcal{F}$ formează o mulțime de k numere consecutive $\{\ell, \ell+1, \ldots, \ell+k-1\}$ **1p**

Caracterizăm funcțiile din f care au $k \leqslant n-2$ puncte fixe.

Pentru $2 \leqslant \ell \leqslant n-k$ avem $f(\ell-1) = \ell$ și $f(\ell+k) = \ell+k-1$. Acum pentru $\{f(1), f(2), \ldots, f(\ell-2)\}$ avem $2^{\ell-2}$ moduri de a construi funcția f, iar pentru $\{f(\ell+k+1), \ldots, f(n)\}$ avem $2^{n-\ell-k}$ moduri de a construi funcția f, adică avem în total 2^{n-k-2} moduri de a construi funcția f în acest caz **1p**

Pentru $\ell = 1$ sau $\ell = n-k+1$ avem fixat doar încă un punct pe lângă cele k puncte fixe, deci f se poate construi în 2^{n-k-1} moduri. Așadar, avem în total $(n-k+3) \cdot 2^{n-k-2}$ funcții în $\mathcal{F}$ având $k \leqslant n-2$ puncte fixe. Pentru $k = n-1$ puncte fixe avem doar două astfel de funcții în $\mathcal{F}$, iar pentru $k = n$ puncte fixe avem o singură funcție în $\mathcal{F}$. **1p**

a) Din cele de mai sus deducem

$$|\mathcal{F}| = 3 + \sum_{k=1}^{n-2} (n-k+3) \cdot 2^{n-k+2} = 3 + \sum_{k=1}^{n-2} 2^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-2} (n-k-1) 2^{n-k-2} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-3} (k+1) 2^k = 2^n - 1 + (n-1) \cdot 2^{n-2} - 2^{n-1} + 1 = (n+1) \cdot 2^{n-2} \ldots \textbf{2p}$$

b) În mod similar, deducem:

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} |\operatorname{Fix}(f)| = 3n - 2 + \sum_{k=1}^{n-2} k(n-k+3) \cdot 2^{n-k+2} = n \cdot 2^{n-1} \qquad \ldots\ldots \textbf{2p}$$

Problema 4. Considerăm un număr natural $n \geqslant 3$, mulțimea $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ și mulțimea $\mathcal{F}$ a funcțiilor de la S la S. Vom spune că o mulțime $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ este generatoare pentru mulțimea $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ dacă orice funcție din $\mathcal{H}$ se poate reprezenta ca o compunere de funcții din $\mathcal{G}$.

a) Fie funcțiile $a : S \to S$, $a(n-1) = n$, $a(n) = n-1$ și $a(k) = k$ pentru $k \in S \setminus \{n-1, n\}$ și $b : S \to S$, $b(n) = 1$ și $b(k) = k+1$ pentru $k \in S \setminus \{n\}$. Arătați că $\{a, b\}$ este o mulțime generatoare pentru mulțimea $\mathcal{B}$ a funcțiilor bijective din $\mathcal{F}$.

b) Demonstrați că numărul minim de elemente pe care le are o mulțime generatoare a lui $\mathcal{F}$ este 3.

Soluție. Vom nota cu fg funcția $f \circ g$ (unde $f, g \in \mathcal{F}$) și cu $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ funcția $f : S \to S$ dată de $f(i_j) = i_{j+1}$, $j = \overline{1, p-1}$, $f(i_p) = i_1$ și $f(x) = x$ pentru $x \neq i_1, \ldots, i_p$ (unde $i_1, \ldots, i_p$ sunt $p \geqslant 2$ elemente distincte din S).

a) Raționăm prin inducție după n. Pentru $n = 3$, $\mathcal{B} = \{a, a^2, b, b^2, ab, ba\}$.

Presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru un $n \geqslant 3$ și arătăm că este adevărată și pentru $n+1$. Fie $f : S \cup \{n+1\} \to S \cup \{n+1\}$, $f(n+1) = m$ și $a', b' : S \cup \{n+1\} \to S \cup \{n+1\}$ analoagele lui a, respectiv b. Atunci $\big((b')^{n-m+1} f\big)(n+1) = n+1$, deci restricția lui $g = (b')^{n-m+1} f$ la S se poate scrie ca o compunere de a și b; avem $f = (b')^m g$ (1) **1p**

Avem $\big(b'a'\big)(n+1) = n+1$ și restricția lui $b'a'$ la S este b. În plus, $\big((b')^n a' b'\big)(n+1) = n+1$ și restricția lui $(b')^n a' b'$ la S este a. Atunci, din (1) reiese că f se poate scrie ca o compunere de a' și b' **1p**

b) Arătăm că, dacă $\mathcal{G}$ este o mulțime generatoare pentru $\mathcal{F}$, atunci $|\mathcal{G}| \geqslant 3$.

Dacă $\mathcal{G}$ are cel mult două elemente f, g, atunci:

• dacă f și g sunt bijective, atunci $\mathcal{G}$ nu poate genera decât funcții bijective;

• dacă f și g nu sunt bijective, atunci ele nu sunt surjective, deci $\mathcal{G}$ nu poate genera decât funcții nesurjective;

• dacă (de exemplu) f este bijectivă și g nu este bijectivă, atunci funcțiile bijective generate de $\mathcal{G}$ sunt f^n, $n \in \mathbb{N}^*$. În acest caz $\mathcal{G}$ nu poate genera atât a cât și b, deoarece $ab \neq ba$, pe când $f^m f^p = f^p f^m, \forall m, p \in \mathbb{N}^*$ **2p**

Arătăm că o mulțime generatoare pentru $\mathcal{F}$ este $\mathcal{G} = \{a, b, c\}$, unde $c : S \to S$, $c(k) = k$ pentru $k \in S \setminus \{n\}$ și $c(n) = n-1$ **1p**

Dovedim că orice $f \in \mathcal{F}$ se scrie ca o compunere de a, b, c prin inducție descendentă, după numărul de elemente din imaginea lui f. Dacă $|\operatorname{Im} f| = n$, atunci f este bijectivă și folosim a).

Presupunem că afirmația este adevărată pentru orice f cu $|\operatorname{Im} f| = k$, unde $1 < k \leqslant n$ și o dovedim pentru un g arbitrar, cu $|\operatorname{Im} g| = k-1$. Deoarece g nu este injectivă, există $u, v \in S$, $u \neq v$ și o funcție bijectivă r astfel încât $\operatorname{Im} gr = \{1, 2, \ldots, k-1\}$ și $(gr)(u) = (gr)(v) = k-1$. Fie $s : S \to S$, $s(n-1) = u$, $s(n) = v$ și $s(x) = x$ pentru $x \neq u, v$. Considerăm funcția $h : S \to S$, $h(x) = (grs)(x)$ pentru $x \leqslant n-1$ și $h(n) = k$. Atunci $|\operatorname{Im} h| = k$, deci h se scrie ca o compunere a funcțiilor a, b, c, iar $grs = hc$, deci $g = hcs^{-1}r^{-1}$ se scrie ca o compunere a funcțiilor a, b, c **2p**