

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE INFORMATICĂ
PROBA DE BARAJ PENTRU JUNIORI
DESCRIEREA SOLUȚIILOR**

COMISIA ȘTIINȚIFICĂ

PROBLEMA 1: EXTRAPARE

Propusă de: Prof. Marinel Șerban, Colegiul Național "Emil Racoviță", Iași

k = 0. Parcurgem reprezentările binare și, pentru fiecare reprezentare, verificăm dacă există vreo cifră 1 care este pe o poziție impară. În acest caz, se afișează -1 , în caz contrar se afișează reprezentarea respectivă.

Soluție completă. Pentru fiecare reprezentare binară, vom afla mai întâi cea mai din dreapta poziție care nu se potrivește cu șablonul unui număr extrapar, această poziție fiind cea mai din dreapta poziție impară pe care se află o cifră egală cu 1. Să notăm această poziție cu x . Dacă nu există o asemenea poziție, putem tăia primele k valori urmând să avem grijă la scoaterea zerourilor ne semnificative de la începutul numărului.

Altfel, vom tăia o subsecvență de lungime k ce se termină la poziția x (intervalul pozițiilor tăiate va fi $[x - k + 1, x]$ sau $[1, k]$ dacă $x \leq k$) și vom verifica dacă șirul rămas este extrapar. În cazul în care șirul este extrapar, vom tăia zerourile ne semnificative și vom afișa răspunsul cerut.

Soluție alternativă. O altă abordare constă în a precalcuła pentru fiecare reprezentare lungimea sufixului valid (care respectă șablonul de extrapar), precum și lungimea prefixului valid atât care presupune prima poziție drept o poziție pară, cât și cel care presupune prima poziție drept o poziție impară. Vom încerca să tăiem pe rând fiecare subsecvență de lungime k , verificarea fiind posibilă în $O(1)$ folosindu-ne de precalcuările făcute anterior. Dacă găsim o poziție validă (prefixul și sufixul corespunzător sunt ambele valide), atunci vom afișa șirul fără secvența de lungime k , având grijă din nou la zerourile ne semnificative.

PROBLEMA 2: FUZIUNE

Propusă de: Prof. Emanuela Cerchez, Colegiul Național "Emil Racoviță", Iași

O primă observație constă în faptul că pentru a verifica dacă fuziunea este posibilă este suficient să reținem lista factorilor primi distincți pentru orice număr (și pentru cele pe care le citim și pentru cele obținute ca rezultat al unei fuziuni). Vom reține factorii primi distincți în ordine crescătoare, pentru a optimiza operațiile de fuziune.

Pentru a obține eficient descompunerea în factori primi a fiecărui număr va trebui să ne folosim de faptul că există maximum 250 de factori primi distincți. Pe măsură ce descompunem numerele în factori primi, vom ține o listă (vector) cu numerele prime pe care le-am descoperit până acum. Astfel, pentru a descompune un număr în factori primi, vom parcurge lista de factori primi descoperiți până acum și pe fiecare îl vom împărți repetat la numărul nostru. Dacă la final rămânem cu un număr diferit de 1, vom continua cu o descompunere în factori primi clasică și fiecare factor prim nou întâlnit va fi adăugat în listă. Astfel, vom face maximum 250 de descompuneri în factori primi clasice, reducând astfel timpul de execuție semnificativ.

Definim un tip *lista* în care reținem lista factorilor primi distincți ai unui număr și lungimea acesteia.

```
struct lista {int d[LGMAX];  
             int lg;};
```

Vom utiliza un vector b cu elemente de tip *lista* în care reținem termenii șirului b , obținut după efectuarea tuturor operațiilor de fuziune. Să notăm cu lgb lungimea lui b .

Citim succesiv numerele din șirul dat și descompunem numărul curent în factori primi și reținem doar factorii primi distincți (în ordine crescătoare) în variabila crt de tip *lista*. Când ultimul element din b fuzionează cu crt , crt va fi înlocuit cu reuniunea dintre crt și $b[lgb]$, iar $b[lgb]$ este eliminat din b . Când crt nu mai fuzionează cu $b[lgb]$ (sau $lgb == 0$) adăugăm pe crt în b . Pentru a verifica dacă două liste fuzionează și pentru a determina reuniunea, vom utiliza un algoritm similar cu interclasarea, ținând cont de faptul că divizorii sunt în ordine crescătoare.

```
Cat timp (lgb > 0)
    {verific daca crt si b[lgb] fuzioneaza
     daca da atunci
        {crt=crt U b[lgb];
         lgb--;
        }
    }
b[++lgb]=crt;
```

Dacă cerința este 1, vom afișa lgb . Dacă cerința este 2, vom determina produsul divizorilor primi distincți ai numerelor din b , până când condiția ca fiecare număr din b să aibă un divizor în comun cu $cf(b)$ este asigurată. Pentru determinarea coeficientului de fuziune $cf(b)$ este necesară implementarea înmulțirii dintre un număr mare și un număr de tip *int*.

Observație Punctaje parțiale se pot obține pentru testele pentru care valorile din șirul dat sunt mici, folosind o reprezentare a listei divizorilor prin vector caracteristic. De asemenea punctaje parțiale la cerința 2 se pot obține dacă se lucrează pentru $cf(b)$ cu tipul *long long int*.

O altă variantă pentru a efectua fuzionările este următoarea: Pornim de la o soluție ineficientă care fuzionează maximal elementele de la stânga la dreapta, cât timp există fuzionări. Astfel pentru șirul 7,6,2,3,2,3,2,3. O tură de fuzionare ar aduce șirul în forma 7,6. 6 fuzionează cu 2, apoi rezultatul cu 3 și așa mai departe. Se observă că pentru șirul 7,2,3,2,3,2,3,6, după o tură de fuzionare am obține șirul 7,2,3,2,3,2,6. O astfel de soluție ar avea o complexitate pătratică în raport cu N . La fel și una care fuzionează maximal elementele de la dreapta la stânga. Totuși, dacă vom fuziona maximal elementele de la stânga la dreapta, apoi de la dreapta la stânga, apoi de la stânga la dreapta etc vom obține o complexitate liniară, cu o constantă 250.

PROBLEMA 3: UDP

Propusă de: Prof. Adrian Panaete, Colegiul Național "A.T. Laurian", Botoșani

Numerele de cel mult 3 cifre formate cu cifrele 1,2 și 4 sunt: 14, 21, 42, 112, 224, 441.

Să presupunem că deja avem o soluție. Se poate observa că se poate modifica soluția în altă soluție după următoarele reguli:

Transformarea de tip 1:

- 112 și 224 se transformă în 21, 21, 42
- 112 și 441 se transformă în 14, 14, 21
- 224 și 441 se transformă în 14, 42, 42

Dacă aplicăm de câte ori este posibil transformarea de tip 1 vom obține o soluție care nu va conține decât cel mult una dintre valorile 112, 224, 441.

Transformarea de tip 2: Sa presupunem că au mai rămas valori 112. Aplicăm ori de câte ori este posibil transformarea 112, 112, 42 se transformă în 14, 21, 21, 21.

În urma acestei transformări rezultă una dintre următoarele situații:

- nu mai avem deloc 42 \Rightarrow avem o soluție formată doar numerele 14, 21, 112.
- nu mai avem deloc 112 \Rightarrow avem o soluție formată doar din numerele 14, 21, 42
- mai rămâne o singură valoare 112 \Rightarrow avem o soluție în care folosim exact o dată 112 și în rest mai apar doar numerele 14, 21, 42.

Analog interpretăm efectul aplicării transformărilor de tip 2:

- 224,224,14 se transformă în 21,42,42,42
- 441,441,21 se transformă în 14,14,14,42

Concluzia este următoarea: în urma aplicării transformărilor de tip 1 și 2 se poate afirma că dacă problema are soluție atunci putem forma o soluție având una dintre următoarele 7 forme:

- (1) conține numai numerele 14, 21, 42
- (2) conține doar numerele 14, 21, 42 și exact o singură dată numărul 112
- (3) conține doar numerele 14, 21, 42 și exact o singură dată numărul 224
- (4) conține doar numerele 14,21,42 și exact o singură dată numărul 441
- (5) conține doar numerele 14, 21, 112
- (6) conține doar numerele 21, 42, 224
- (7) conține doar numerele 14,42,441

Se încearcă determinarea unei soluții în una dintre cele 7 forme și dacă nu se obține o soluție se trage concluzia că problema nu are soluție.

O implementare a acestei metode de rezolvare se regăsește în una dintre sursele oficiale publicate.

Metoda 1. Se poate observa că:

Dacă avem o soluție de forma 1 atunci este îndeplinită următoarea condiție:

(*) $U \leq D + P$; $D \leq U + P$; $P \leq U + D$ și $U + D + P$ este număr par

Vom obține o soluție cu:

- $(U + P - D)/2$ de 14
- $(D + U - P)/2$ de 21
- $(P + D - U)/2$ de 42

Soluțiile de forma 2, 3 sau 4 sunt similare și se obțin astfel (exemplific pentru soluția de forma 2). Deoarece avem o dată valoarea 112, după ce scădem U cu 2 și D cu 1, valorile U , D și P astfel modificate vor verifica condiția (*) deci din acel moment am redus problema la determinarea unei soluții de forma 1.

Soluțiile de forma 5, 6 sau 7 sunt soluții care corespund situațiilor în care una (și numai una) dintre valorile U , D și P "domină" celelalte două valori. Tot pentru exemplificare vom trata forma 5. Soluția conține doar 14, 21, 112 $\Rightarrow U \geq D + P$. Dacă $U > 2 * D + P$ cu siguranță nu pot obține soluție pentru că numărul de 1 este prea mare. Dacă caz putem forma $U - D - P$ valori de 112. După ce formăm aceste numere, numărul de valori U , D , P modificate vor respecta relația $U = D + P$. Din acel moment se formează cu cifrele rămase D de 21 și P de 14.

Concluzie:

Cazul 1: $U \leq D + P$, $D \leq U + P$, $P \leq U + D$

Dacă $U + D + P$ este par formăm unica soluție posibilă formată doar din numerele 14, 21, 42

Dacă $U + D + P$ impar - încercăm una dintre situațiile în care formând o singură dată unul și numai unul dintre numerele de 3 cifre din cele rămase se formează (în mod unic) soluție formată doar cu numerele 14, 21, 42.

Cazul 2: $U > D + P$ sau $D > U + P$ sau $P > U + D$ sunt similare.

Dacă $U > 2 * D + P$ sau $D > 2 * P + U$ sau $P > 2 * U + P$ problema nu are soluție. Altfel problema are soluție obținută după următoarea strategie (exemplific pentru cazul $U > D + P$). Dacă $U > D + P$ formăm valori 112 până când obținem $U = D + P$, formăm valori 14 până terminăm valorile de 4 și din cifrele rămase formăm numere 21.

O rezolvare prin această metodă se regăsește într-una dintre sursele oficiale.

Metoda 2. Se poate folosi o strategie prin care ne propunem ca plecând de la cifrele inițiale să aplicăm în mod repetat de un număr maxim posibil de ori modificări prin care formăm numerele propuse combinând una dintre cifre cu alte cifre sau numere de care dispunem cu scopul final de a elimina cifrele și de a rămâne doar cu cele 6 numere (14, 21, 42, 112, 224 și 441). Sunt mai multe astfel de transformări. Le încercăm pe toate, în mod repetat până în momentul în care ajungem în una dintre următoarele două situații:

- (1) Nu mai avem cifre \Rightarrow am obținut o soluție.

(2) Nu mai putem niciuna dintre transformările posibile și ne mai rămân cifre \Rightarrow nu există soluție.

Enumerăm o parte dintre transformări lăsând găsirea tuturor ca exercițiu

- 1, 2 se transformă în 21
- 1, 4 se transformă în 14
- 2, 4 se transformă în 42
- 1, 21 se transformă în 112
- ...

O rezolvare prin această metodă se regăsește într-una dintre sursele oficiale.