CONCURSUL NAȚIONAL „PEDAGOGIA MATEMATICII”
16 mai 2026
ETAPA NAȚIONALĂ
CLASA a X-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- ***Filiera vocaţională, profilul pedagogic, toate specializările***
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**

SUBIECTUL I (autor Ileana Stoica) (22,5 de puncte)

7p	a) Demonstrați că pentru oricare $a,b,c\in(0,+\infty)$ cu $abc=1$ are loc relația $\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bc}+\frac{c}{1+c+ac}=1$.
7p	b) Se consideră expresia $E=x^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}\cdot y^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)}\cdot z^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}$, unde $x,y,z\in(0,+\infty)$. Calculați $\lg E$.
8,5p	c) Arătați că $\dfrac{x^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}}{1+x^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}+x^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}y^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)}}+\dfrac{y^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)}}{1+y^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)}+y^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)}z^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}}+\dfrac{z^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}}{1+z^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}+x^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}z^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}}=1$, unde $x,y,z\in(0,+\infty)$.

a)	$abc=1$, cu $a,b,c\in(0,+\infty)$, deci $a=\frac{1}{bc}$	**2p**
	$\dfrac{\frac{1}{bc}}{1+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bc}b}+\dfrac{b}{1+b+bc}+\dfrac{c}{1+c+\frac{1}{bc}c}=1$	**2p**
	$\frac{1}{1+b+bc}+\frac{b}{1+b+bc}+\frac{bc}{1+b+bc}=1$	**3p**
b)	$\lg E=\lg\left(x^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}\cdot y^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)}\cdot z^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}\right)=\lg x^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}+\lg y^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)}+\lg z^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}$	**3p**
	$\lg E=\lg\left(\frac{y}{z}\right)\lg x+\lg\left(\frac{z}{x}\right)\lg y+\lg\left(\frac{x}{y}\right)\lg z=(\lg y-\lg z)\lg x+(\lg z-\lg x)\lg y+(\lg x-\lg y)\lg z$	**2p**
	$\lg E=0$	**2p**
c)	Conform b): $\lg E=0$, deci $E=x^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}\cdot y^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)}\cdot z^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}=1$	**3p**
	Înlocuim în relația de la punctul a): $a=x^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}$, $b=y^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)}$ și $c=z^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}$	**3p**

	Deci $\dfrac{x^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}}{1+x^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}+x^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}y^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)}}+\dfrac{y^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)}}{1+y^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)}+y^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)}z^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}}+\dfrac{z^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}}{1+z^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}+x^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}z^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}}=1$	**2,5p**

SUBIECTUL al II-lea (autor Ramona Drăgan) **(22,5 de puncte)**

	Se consideră punctele $A(-1,-4)$, $B(1,6)$ și $C(a,b)$, unde $a,b\in\mathbb{Z}$.
10p	a) Verificați că, dacă numărul b are cifra unităților 2, atunci punctele A, B și C **nu** sunt coliniare.
12,5p	b) Demonstrați că, dacă ambele numere a și b au cifra unităților egală cu 2, atunci aria triunghiului ABC este număr natural impar.

a)	Dreapta AB are ecuația $y=5x+1$	**2p**
	Dacă punctele A, B și C ar fi coliniare, atunci $y_C=5x_C+1$	**2p**
	$b=5a+1$ și $a\in\mathbb{Z}$, deci ultima cifră a lui $5a$ este 0 sau 5	**2p**
	Utima cifră a lui $5a+1$ este 1, 4, 6 sau 9, pentru orice $a\in\mathbb{Z}$	**2p**
	Numărul b are cifra unităților 2, deci punctele A, B și C **nu** sunt coliniare.	**2p**
b)	$AB=2\sqrt{26}$ și $d(C,AB)=\dfrac{\lvert 5a-b+1\rvert}{\sqrt{26}}$	**4p**
	$A_{ABC}=\lvert 5a-b+1\rvert$, iar $a=10k+2$, $b=10p+2$, cu $k,p\in\mathbb{Z}$	**4p**
	$A_{ABC}=\lvert 50k-10p+9\rvert$ impară, pentru oricare $k,p\in\mathbb{Z}$	**4,5p**

SUBIECTUL al III-lea (autor Alicia Dobrin) **(22,5 de puncte)**

	La intrarea într-un bloc de locuințe se află un interfon cu 12 taste: 3 litere (A, B și C) și 9 cifre diferite de 0. Codul care declanșează deschiderea ușii poate fi schimbat de administrator. Acest cod este întotdeauna compus dintr-o literă urmată de 3 cifre.
10p	**a)** În cazul în care cele 3 cifre **nu** sunt neapărat distincte: a1) Câte coduri care încep cu litera A poate propune administratorul? a2) Câte coduri poate să propună în total?
12,5p	**b)** În cazul în care litera codului este B și cele 3 cifre sunt toate distincte: b1) Câte coduri poate propune administratorul? b2) Câte coduri conținând cel puțin una din cifrele 7, 8, 9, pot fi propuse?

a1)	Codul are 4 poziții: primei poziții îi corespunde un caz (litera A fiind fixată); următoarelor trei poziții le corespund câte 9 cazuri	**2p**
	Regula produsului: $1\cdot 9\cdot 9\cdot 9=729$ de coduri	**3p**
a2)	Codul are 4 poziții: primei poziții îi corespund trei cazuri; următoarelor trei poziții le corespund câte 9 cazuri	**2p**
	Regula produsului: $3\cdot 9\cdot 9\cdot 9=2187$ de coduri	**3p**
b1)	Codul are 4 poziții: primei poziții îi corespunde un caz (litera B fiind fixată); următoarelor trei poziții le corespund cifre distincte	**2p**
	$1\cdot A_9^3=504$ coduri	**3p**

b2)	Expresia „cel puțin una din cifrele” ne conduce la considerarea situației contrare. Căutăm mulțimea codurilor care nu conțin nici cifra 7, nici 8, nici 9	**3p**
	Cardinalul mulțimii căutate este atunci $504-120=384$	**4,5p**

SUBIECTUL IV (autor Raluca Caraion) **(22,5 de puncte)**

În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A_m(m,\ln e)$, $B_m(m,\ln e^2)$ și $C_m(m,\ln e^3)$, cu $m\in\{1,2,3\}$.

Vom numi mulțime ***balanță*** o mulțime de puncte cu $2k$ elemente, $k\in\mathbb{N}^*$, care poate fi împărțită în două submulțimi disjuncte, cu câte k elemente și cu proprietatea că suma absciselor punctelor din prima submulțime este egală cu suma absciselor punctelor din a doua submulțime, iar suma ordonatelor punctelor din prima submulțime este egală cu suma ordonatelor din a doua submulțime.

8p a) Determinați suma absciselor, respectiv suma ordonatelor punctelor A_m, B_m, C_m.

14,5p b) Verificați că mulțimea $Q=\{A_1,B_1,C_1,A_2,C_2,A_3,B_3,C_3\}$ este mulțime ***balanță***, exemplificând două submulțimi disjuncte ce îndeplinesc condițiile din enunț.

a)	Suma absciselor este $(1+2+3)\cdot 3=18$	**3p**
	Suma ordonatelor este $3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3=18$	**5p**
b)	Pentru $Q=\{A_1,B_1,C_1,A_2,C_2,A_3,B_3,C_3\}$, suma absciselor este 16 și suma ordonatelor este 16	**6p**
	Fie $Q'=\{A_1,B_1,B_3,C_3\}$ și $Q''=\{A_2,A_3,C_1,C_2\}$	**8,5p**