



CONCURSUL NAȚIONAL „PEDAGOGIA MATEMATICII”
16 mai 2026
ETAPA NAȚIONALĂ
CLASA a IX-a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- *Filiera vocațională, profilul pedagogic, toate specializările*
- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (autor ***)

(22,5 de puncte)

Se consideră funcțiile $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = (m+1)x^2 - 2(m+2)x + m+2$, cu $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p

a) Determinați numărul real m , $m \neq -1$, pentru care punctul $V(2026, -2026)$ este vârful parabolei asociate graficului funcției corespunzătoare.

7,5p

b) Demonstrați că parabolele asociate graficelor funcțiilor f_m au vârfurile situate pe graficul funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

10p

c) Arătați că parabolele asociate graficelor funcțiilor f_m sunt toate concurente într-un același punct, $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a)	$-\frac{b}{2a} = 2026$, deci $\frac{m+2}{m+1} = 2026$	3p
	$m = -\frac{2024}{2025}$, pentru care $f(2026) = -2026$	2p
b)	$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, cu $-\frac{b}{2a} = \frac{m+2}{m+1}$, $\Delta = 4(m+2)^2 - 4(m+1)(m+2) = 4(m+2)$	2p
	$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{m+2}{m+1}$	2p
	$g\left(\frac{m+2}{m+1}\right) = -\frac{m+2}{m+1}$, deci parabolele asociate graficelor funcțiilor f_m au vârfurile situate pe graficul funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x$, pentru orice $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	3,5p
c)	Graficele funcțiilor f_m sunt toate concurente într-un același punct $A(x_A, y_A)$ dacă x_A și y_A nu depind de $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	2p
	$m(x_A - 1)^2 + x_A^2 - 4x_A + 2 - y_A = 0$, pentru orice $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	2p
	Obținem $\begin{cases} (x_A - 1)^2 = 0 \\ x_A^2 - 4x_A + 2 - y_A = 0 \end{cases}$, de unde $x_A = 1$	4p
	$y_A = -1$, deci punctul $A(1, -1)$ este punctul de concurență	2p

SUBIECTUL al II-lea (adaptare *Gazeta matematică, Supliment cu exerciții, nr. 11/2025*)

(22,5 de puncte)

	În triunghiul ABC , punctele D, E, F sunt mijloacele laturilor BC , CA , respectiv AB , iar punctul P verifică relația $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.	
7p	a) Verificați dacă $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD}$.	
7p	b) Demonstrați că punctele A , D și P sunt coliniare.	
8,5p	c) Demonstrați că $3\overrightarrow{AP} = 2(\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{FP})$.	
a)	E mijlocul lui AC , deci $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$	1p
	F mijlocul lui AB , deci $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$	1p
	$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$ (1)	2p
	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ și $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$, deci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ (2)	2p
	Din (1) și (2) obținem $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD}$	1p
b)	Din ipoteză, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$	1p
	În triunghiul ABC , AD mediană, deci $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$	3p
	$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AD}$, deci punctele A , D și P sunt coliniare	3p
c)	$\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AF}$	2p
	$\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{FP} = 2\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF}$	1p
	$2(\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{FP}) = 2(2\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD})$	1p
	$2(\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{FP}) = 2\left(2\overrightarrow{AP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}\right)$	2p
	Deci $2(\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{FP}) = 2 \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AP}$	2,5p

SUBIECTUL al III-lea
(22,5 de puncte)

	Fie a, b și c numere reale strict pozitive și A, B și C mulțimile rădăcinilor reale ale ecuațiilor $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$, respectiv $cx^2 + ax + b = 0$.	
7p	a) Există valori $a, b, c > 0$ pentru care cele 3 ecuații au o soluție reală comună? Justificați.	
15,5p	b) Determinați numărul de elemente pe care îl poate avea mulțimea $A \cup B \cup C$, când $a, b, c > 0$.	
a)	Nu există valori $a, b, c > 0$ pentru care cele 3 ecuații au o soluție reală comună	1p
	Pentru a justifica această afirmație, presupunem că cele trei ecuații au o soluție reală comună α . Atunci $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, $b\alpha^2 + c\alpha + a = 0$ și $c\alpha^2 + a\alpha + b = 0$	3p
	Adunând cele trei relații obținem $(a+b+c)\alpha^2 + (a+b+c)\alpha + a+b+c = 0$	1p
	$(a+b+c)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$ și, cum $a, b, c > 0$, $a+b+c \neq 0$, iar $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ nu are rădăcini reale, presupunerea este falsă	2p
b)	Presupunem că toate cele trei ecuații au soluții reale, deci $\Delta_1 \geq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, $\Delta_3 \geq 0$ și obținem $b^2 \geq 4ac$, $c^2 \geq 4ab$ și $a^2 \geq 4bc$	3p
	Înmulțind cele trei inegalități (care au membrii pozitivi) obținem $(abc)^2 \geq 64(abc)^2$, fals (a, b și c nenule)	2p



Deci cele trei ecuații nu pot avea simultan soluții reale	1p
Deci mulțimea $A \cup B \cup C$ poate avea 0, 1, 2, 3 sau 4 elemente	2p
Există valori $a, b, c > 0$ pentru care mulțimea $A \cup B \cup C$ nu are niciun element; de exemplu, $a = b = c = 1$	1,5p
Există valori $a, b, c > 0$ pentru care mulțimea $A \cup B \cup C$ are un element; de exemplu, $a = c = 1$ și $b = 2$	1,5p
Există valori $a, b, c > 0$ pentru care mulțimea $A \cup B \cup C$ are două elemente; de exemplu, $a = 1$, $b = 3$ și $c = 2$	1,5p
Există valori $a, b, c > 0$ pentru care mulțimea $A \cup B \cup C$ are trei elemente; de exemplu, $a = 4$, $b = 20$ și $c = 25$	1,5p
Există valori $a, b, c > 0$ pentru care mulțimea $A \cup B \cup C$ are patru elemente; de exemplu, $a = 1$, $b = 7$ și $c = 7$	1,5p

SUBIECTUL IV (autor Ramona Drăgan)

(22,5 de puncte)

22,5p	În triunghiul ABC pătratele lungimilor laturilor BC și AC , exprimate cu aceeași unitate de măsură, sunt direct proporționale cu numerele 2 și 3, iar măsurile unghiurilor A , B și C , exprimate în grade, sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Determinați măsurile celor 3 unghiuri ale triunghiului.
	Măsurile unghiurilor A , B și C , exprimate în grade, sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, deci $2\hat{B} = \hat{A} + \hat{C}$ și, cum $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, obținem $\sphericalangle B = 60^\circ$
	Notând $BC = a$ și $AC = b$, din ipoteză avem că $\frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{3}$, deci $b = \frac{a\sqrt{6}}{2}$
	Din teorema sinusurilor, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, deci $\frac{a}{\sin A} = \frac{a\sqrt{6}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$
	Obținem $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și, cum $\sphericalangle A < 120^\circ$, obținem $\sphericalangle A = 45^\circ$
	$\sphericalangle C = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 75^\circ$, care convin